Teoria Miary i Całki

Bartosz Kwaśniewski

Faculty of Mathematics, University of Białystok

Wykład 6

Miary Lebesgue'a-Stieltjesa


Lebesgue **Stieltjes**

Tw. Jeśli $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ jest **niemalejąca** i **lewostronnie ciągła**, to istnieje dokładnie jedna miara λ_F na σ-ciele $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ taka, że

$$\forall_{\substack{a,b\in\mathbb{R} \\ a<b}} \qquad \lambda_F([a,b)) := F(b) - F(a). \tag{$*$}$$

Miarę λ_F nazywamy **miarą Lebesgue'a-Stieltjesa** daną przez F

Uw. $\forall_{x\in\mathbb{R}}\ F(x) = x \implies \lambda_F = \lambda$ miara Lebesgue'a (długość).

Dowód: Na mocy tw. Caratheodoriego i Dynkina, wystarczy pokazać, że $(*)$ definiuje pre-miarę na półpierścieniu $\mathcal{P} := \{[a,b) : a,b \in \mathbb{R}\}$. Skoro F niemalejąca, to dla $a,b \in \mathbb{R}$, $a \leqslant b$, mamy

$$F(a) \leqslant F(b) \iff F(b) - F(a) \geqslant 0 \iff \lambda_F \geqslant 0$$

Zatem **trzeba pokazać, że** $\lambda_F : \mathcal{P} \to [0,\infty)$ **jest** σ-**addytywna**, czyli

$$[a,b) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \implies F(b) - F(a) = \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(a_n).$$

Tu kluczowa jest również lewostronna ciągłość F $\Big(\lim\limits_{\substack{y\to x \\ y<x}} F(y) = F(x)\Big)$

Krok 1. $\bigsqcup_{n=1}^{N}[a_n, b_n) \subseteq [a, b) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{N} F(b_n) - F(a_n) \leqslant F(b) - F(a)$.

Dowód przez indukcję po N: Przyjmijmy, że $b_N = \max\{b_1, ..., b_N\}$. Wtedy $b_n \leqslant a_N$ dla $n < N$, a więc $[a_n, b_n) \subseteq [a, a_N)$ dla $n < N$. Zatem z założenia indukcyjnego, $\sum_{n=1}^{N-1} F(b_n) - F(a_n) \leqslant F(a_N) - F(a)$. Stąd

$$\begin{aligned}
\sum_{n=1}^{N} F(b_n) - F(a_n) &= \sum_{n=1}^{N-1} F(b_n) - F(a_n) + F(b_N) - F(a_N) \\
&\overset{\text{Zał. ind.}}{\leqslant} F(a_N) - F(a) + F(b_N) - F(a_N) \\
&= F(b_N) - F(a) \overset{b_N \leqslant b}{\leqslant} F(b) - F(a).
\end{aligned}$$

Krok 2. $\bigsqcup_{n=1}^{\infty}[a_n, b_n) \subseteq [a, b) \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(a_n) \leqslant F(b) - F(a)$.

Dowód: W **Krok 1** Przejść z $N \to \infty$.

Krok 3. $[c,d] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (c_n, d_n) \Longrightarrow F(d) - F(c) \leqslant \sum_{n=1}^{N} F(d_n) - F(c_n)$.

Dowód przez indukcję po N: Możemy założyć, że $d \in (c_N, d_N)$. Wtedy $[c, c_N] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N-1} (c_n, d_n)$, więc $F(c_N) - F(c) \leqslant \sum_{n=1}^{N-1} F(d_n) - F(c_n)$ z założenia indukcyjnego. Stąd

$$\begin{aligned} F(d) - F(c) &= F(c_N) - F(c) + F(d) - F(c_N) \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{N-1} F(d_n) - F(c_n) + F(d) - F(c_N) \\ &\overset{d \leqslant d_N}{\leqslant} \sum_{n=1}^{N} F(d_n) - F(c_n). \end{aligned}$$

Krok 4. $[a,b) \subseteq \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \Longrightarrow F(b) - F(a) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(a_n)$.

Dowód: Niech $\varepsilon > 0$. Z lewostronnej ciągłości F istnieją $d < b$ oraz $c_n < a_n$ takie, że $|F(b) - F(d)| \leqslant \varepsilon$, $|F(a_n) - F(c_n)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^n}$ dla $n \in \mathbb{N}$. Skoro F niemalejąca, to de facto

$$F(b) \leqslant F(d) + \varepsilon \quad \text{ i } \quad F(a_n) - \frac{\varepsilon}{2^n} \leqslant F(c_n) \text{ dla } n \in \mathbb{N}.$$

Zauważmy, że

 

$$[a,d] \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} (c_n, b_n)$$

Jako że $[a,d]$ jest zbiorem zwartym (z Twierdzenia Heinego-Borela) istnieje N takie, że $[a,d] \subseteq \bigcup_{n=1}^{N} (c_n, b_n)$. Zatem z **Krok 3**

$$F(d) - F(a) \leqslant \sum_{n=1}^{N} F(b_n) - F(c_n) \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(c_n).$$

Stąd

$$F(b) - F(a) \overset{F(b)\leqslant F(d)+\varepsilon}{\leqslant} F(d) - F(a) + \varepsilon \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(c_n) + \varepsilon$$

$$\overset{F(c_n)\geqslant F(a_n)-\frac{\varepsilon}{2^n}}{\leqslant} \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(a_n) + \varepsilon + \varepsilon.$$

Przechodząc z $\varepsilon \to 0$ dostajemy $F(b) - F(a) \geqslant \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(a_n)$.

Krok 5. $[a,b) = \bigsqcup_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n) \implies F(b) - F(a) = \sum_{n=1}^{\infty} F(b_n) - F(a_n)$.

Dowód: **Krok 2** + **Krok 4**. ■

Tw. Miara μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest miarą Lebesgue'a-Stieltjesa, tzn. $\mu = \lambda_F$ dla pewnego $F \iff \mu$ jest skończona na zbiorach ograniczonych.

Dowód: "$\Longrightarrow$". Jeśli $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ ograniczony, to $A \subseteq [a, b)$ dla pewnych $a, b \in \mathbb{R}$ i stąd $\lambda_F(A) \leqslant \lambda_F([a, b)) = F(b) - F(a) < \infty$

"$\Longleftarrow$"Jeśli μ skończona na zbiorach ograniczonych, to wzór

$$F(x) := \begin{cases} \mu([0, x)), & x \geqslant 0 \\ -\mu([x, 0)), & x < 0 \end{cases}$$

poprawnie określa funkcję $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że

$$\forall_{\substack{a,b\in\mathbb{R} \\ a<b}} \qquad \mu([a, b)) := F(b) - F(a).$$

Powyższy warunek implikuje, iż F jest niemalejąca (nieujemność μ) oraz lewostronnie ciągła (ciągłość μ). Zatem $\mu = \lambda_F$. ■

Uw. Funkcja F jest wyznaczona przez λ_F z dokładnością do stałej:

$$\lambda_F = \lambda_G \iff \exists_{c\in\mathbb{R}}\ G = F + c$$

Uw. Każda miara skończona na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ jest miarą Lebesgue'a-Stieltjesa.

Stw. Jeśli μ jest miarą skończoną na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$, to wzór

$$F(x) := \mu((-\infty, x)), \qquad x \in \mathbb{R}$$

definiuje funkcję $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ taką, że $\mu = \lambda_F$ oraz

$$\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0, \qquad \lim_{x\to+\infty} F(x) = \mu(\mathbb{R}).$$

Dowód: Funkcja F jest poprawnie określona, bo μ skończona, oraz

$$\begin{aligned}\mu([a,b)) &= \mu((-\infty,b)\setminus(-\infty,a)) = \mu((-\infty,b)) - \mu((-\infty,a)) \\ &= F(b) - F(a).\end{aligned}$$

Zatem $\mu = \lambda_F$. Jeśli $x_n \searrow -\infty$ oraz $y_n \nearrow +\infty$, to z ciągłości miary

$$\lim_{n\to\infty} F(x_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(-\infty, x_n) = \mu\Big(\bigcap_{n=1}^{\infty}(-\infty, x_n)\Big) = \mu(\emptyset) = 0$$

$$\lim_{n\to\infty} F(y_n) = \lim_{n\to\infty} \mu(-\infty, y_n) = \mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty}(-\infty, y_n)\Big) = \mu(\mathbb{R}). \qquad \blacksquare$$

Wn. Wzór $F(x) = \mu((-\infty, x))$, $x \in \mathbb{R}$, zadaje wzajemnie jednoznaczną odpowiedniość między miara probabilistycznymi μ na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ oraz funkcjami $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ takimi, że

1. F jest niemalejąca
2. F jest lewostronnie ciągła
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.

Dowód: Tw + Stw + Uw. ■

Uw. Powyższe wyniki mają swoje odpowiedniki w zastosowaniu do półpierścienia $\mathcal{P}' := \{(a, b] : a, b \in \mathbb{R}\}$. Różnica jest wtedy taka, że odpowiednie "dystrybuanty" są **prawostronnie ciągłe**.

Wn. Wzór $F(x) = \mu((-\infty, x])$, $x \in \mathbb{R}$, zadaje 1-1 odpowiedniość między miara probabilistycznymi na $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ i funkcjami $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ t.że

1. F jest niemalejąca
2. F jest prawostronnie ciągła
3. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ oraz $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1$.